Программа учебной дисциплины «Алгебра»

Утверждена
Академическим советом ОП
Протокол № от __.__.20__

Разработчик	В.Л. Чернышев , к.ф.-м.н, доцент
Число кредитов	8
Контактная работа (час.)	144
Самостоятельная работа (час.)	160
Курс, Образовательная программа	1 курс, 09.03.04 «Программная инженерия»
Формат изучения дисциплины	Без использования онлайн курса

1. Цель, результаты освоения дисциплины и пререквизиты

1.1. Цели освоения

Целями освоения дисциплины «Алгебра» являются:

- Развитие математического кругозора и алгебраического мышления студентов.
- Обучение студентов важнейшим теоретическим положениям линейной алгебры, началам абстрактной алгебры, матричным методам.
- Выработка у студентов навыков решения конкретных задач, требующих исследования систем линейных уравнений, применения матричных вычислений, многомерной геометрии, линейных операторов.

1.2. Результаты освоения

В результате освоения дисциплины студент должен:

- **Знать**

– точные формулировки основных понятий, относящихся к теории матриц и определителей, абстрактной алгебре, аналитической геометрии, линейной алгебре;

– основные теоремы о системах линейных уравнений, матрицах и определителях, прямых и плоскостях, линейных пространствах, линейных операторах, квадратичных формах, евклидовых пространствах, простейшие теоремы о группах, кольцах и полях.

- **Уметь**

– решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма Гаусса, вычислять ранги матриц, определители матриц, выполнять операции над матрицами;

– выяснять, является ли данное множество группой, кольцом или полем, уметь устанавливать изоморфизмы между ними, исследовать строение групп;

– решать стандартные задачи векторной алгебры, геометрии прямых и плоскостей;

– находить базисы конечномерных линейных пространств и подпространств, координаты векторов, решать задачи о линейных операторах и собственных векторах при помощи матриц, простейшие задачи геометрии евклидовых пространств, приводить к каноническому виду квадратичные формы, исследовать их на знакоопределенность.

- **Владеть** методами теории матриц, линейной алгебры, аналитической геометрии, классической и абстрактной алгебры, основными алгоритмами: алгоритмом Гаусса и базирующимися на нем алгоритмами решения матричных задач и задач линейной алгебры, алгоритмом Лагранжа.

В результате освоения дисциплины студент осваивает следующие компетенции:

Компетенция	Код по ФГОС / НИУ	Дескрипторы – основные признаки освоения (показатели достижения результата)	Формы и методы обучения, способствующие формированию и развитию компетенции
Универсальная	УК-1 / СК-Б1	Способен учиться, приобретать новые знания, умения, в том числе в области, отличной от профессиональной.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Универсальная	УК-3 / СК-Б4	Способен решать проблемы в профессиональной деятельности на основе анализа и синтеза.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-1	Способен применять основные концепции, принципы, теории и факты, связанные с информатикой и	Стандартные (лекционно-семинарские)

		прикладной математикой при решении научно-исследовательских задач.	
Профессиональная	ПК-2	Способен к формализации в своей предметной области с учетом ограничений используемых методов исследования.	Стандартные (лекционно-семинарские)
Профессиональная	ПК-3	Способен использовать методы и инструментальные средства исследования объектов профессиональной деятельности.	Стандартные (лекционно-семинарские)

1.3. Место дисциплины в учебном плане

Настоящая дисциплина является обязательной и относится к базовым дисциплинам профессионального цикла. Для освоения учебной дисциплины не требуются знания и компетенции, выходящие за пределы требований к поступающим на программу бакалавриата. Изучение данной дисциплины базируется на школьном курсе алгебры и начал анализа. Для освоения учебной дисциплины, студенты должны владеть следующими знаниями и компетенциями:

- знание элементарной алгебры,
- знание простейших понятий теории множеств.

Основные положения дисциплины должны быть использованы в дальнейшем при изучении следующих дисциплин:

- Математический анализ,
- Анализ данных,
- Дискретная математика,
- Теория вероятностей и математическая статистика,
- Статистические и эмпирические методы компьютинга,
- Алгоритмы и структуры данных.

2. Содержание учебной дисциплины

Тема (раздел дисциплины)	Объем в часах лк см ср	Планируемые результаты обучения (ПРО), подлежащие контролю	Формы контроля
1 модуль			
Тема 1. Системы линейных уравнений, матрицы	9 9 20	Умение решать системы линейных уравнений при помощи алгоритма Гаусса, выполнять операции над матрицами.	Домашнее задание, Письменная работа 120 минут.
Тема 2. Определители	9 9 20	Умение вычислять определители матриц (в том числе, используя определение), находить ранги матриц.	
2 модуль			
Тема 3. Векторная алгебра. Элементы аналитической геометрии	6 6 13	Умение применять основные векторные и матричные операции для решения задач аналитической геометрии.	Домашнее задание, Письменная работа 120 минут.
Тема 4. Системы линейных уравнений (продолжение)	6 6 13	Умение находить фундаментальную систему решений однородной СЛАУ, находить общее решение неоднородной СЛАУ, исследовать СЛАУ на совместность.	
Тема 5. Комплексные числа. Элементы общей алгебры	6 6 14	Умение работать с комплексными числами (в частности, умение извлекать комплексные корни). Умение выяснять, является ли данное множество с данной бинарной операцией полугруппой, моноидом, группой.	
3 модуль			
Тема 6. Элементы общей алгебры (окончание)	6 6 13	Умение исследовать строение групп. Умение применять основы шифрования. Умение выяснять, является ли данной множество кольцом, полем, алгеброй и уметь устанавливать	Домашнее задание, Письменная работа, 120 минут.

		изоморфизмы между ними.	
Тема 7. Линейные пространства. Линейные отображения и операторы	6 6 13	Умение выяснять является ли данный алгебраический объект линейным пространством. Уметь находить матрицы линейных операторов, выяснять когда эти матрицы имеют простейший вид и находить его.	
Тема 8. Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства	6 6 14	Умение приводить билинейные и квадратичные формы к каноническому виду, исследовать их на положительную и отрицательную определенность.	
4 модуль			
Тема 9. Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства (продолжение)	9 9 20	Умение находить расстояния между вектором и линейным многообразием в евклидовом пространстве. Умение находить основные матричные разложения.	Домашнее задание, Коллоквиум, Письменная работа, 120 минут.
Тема 10. Кривые и поверхности второго порядка	9 9 20	Умение классифицировать кривые и поверхности второго порядка и приводить их к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига.	
Часов по видам учебных занятий:	72 72 160		
Итого часов:	304		

Формы учебных занятий:

лк – лекции в аудитории;

см - семинары/ практические занятия/ лабораторные работы в аудитории;

ср – самостоятельная работа студента.

Содержание разделов дисциплины

В квадратных скобках указаны номера учебников из пункта 5.1.

Тема 1. Системы линейных уравнений, матрицы

1. Системы линейных алгебраических уравнений. Операции над матрицами: сложение, умножение на число, транспонирование и умножение. Свойства

операций над матрицами: сложения и умножения на скаляр, транспонирования, умножения. Единичная матрица.

2. Некоммутативность умножения матриц. Симметрические матрицы. Ступенчатый вид матрицы и канонический (улучшенный ступенчатый) вид матрицы. Элементарные преобразования строк матрицы. Теорема о методе Гаусса. Совместные и несовместные системы линейных уравнений. Свободные переменные.

Литература по теме: [3], §6.8, с.227-233; [6], гл.1, с.16-29; [1], т.1, гл.1, §3, с. 19-26. [3], §5.1, с.147-155; [6], гл.4, с.71-81; [1], т.1, гл.2, §1,3; с. 19-26; [7], гл.5, §§ 1,2.

Тема 2. Определители

3. Перестановки и подстановки. Инверсии. Транспозиции. Знак и чётность перестановки и подстановки. Общая формула для определителя произвольного порядка. Свойства определителя, в частности: разложение определителя по строке (столбцу) и фальшивое разложение, вычисление определителя верхнетреугольной матрицы. Утверждение о том, что любая функция от столбцов матрицы является определителем, если она линейна по каждому аргументу, кососимметрична и принимает значение 1 на единичной матрице, для случая квадратной матрицы второго порядка. Определитель произведения двух квадратных матриц. Способы вычисления определителей.

Литература по теме: [3], гл.1, §1.1, с.16-20; [1], т. 1, гл.1, §4, с. 29-32. [3], гл. 6, §6.1-6.3, с.191-204; [1], т.1, гл.3, §§1-2. [3], гл. 6, §6.4, с.205-208; [17].

Тема 3. Системы линейных уравнений, матрицы (продолжение)

4. Формулы Крамера для квадратной матрицы произвольного порядка. Дополняющий минор, алгебраическое дополнение. Союзная матрица. Обратная матрица. Критерий существования и формула для нахождения обратной матрицы. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований. Матричные уравнения $AX = B, XA = B$. Минор. Ранг матрицы. Базисный минор. Определение линейной комбинации строк. Линейная зависимость строк (столбцов).
5. Критерий линейной зависимости. Свойства ранга. Теорема о базисном миноре и её следствия (теорема о ранге матрицы и критерий невырожденности квадратной матрицы). Вычисление ранга матрицы: элементарные преобразования и метод окаймляющих миноров. Свойства решений однородных и неоднородных систем линейных алгебраических уравнений.
6. Теорема Кронекера—Капелли. Критерий существования ненулевого решения однородной системы линейных уравнений с квадратной матрицей.

Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений. Теорема о существовании ФСР. Теорема о структуре общего решения однородной системы линейных алгебраических уравнений. Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

Литература по теме: [3], гл. 6, §6.3, с.191-204 [6], гл.4, с.77-83, [1], т.1, гл.3, §§2-3, с.116-122. [1], т.1, гл.3, §3, с.123; [14].

Тема 4. Векторная алгебра. Элементы аналитической геометрии.

7. Векторы в трехмерном пространстве, линейные операции над ними и их свойства. Скалярное произведение векторов в трехмерном пространстве и его алгебраические свойства. Выражение ортогональной проекции одного вектора на направление другого.
8. Базис в трехмерном пространстве. Ортогональный и ортонормированный базисы. Правый и левый базисы. Вычисление скалярного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Вычисление длины вектора и угла между векторами. Направляющие косинусы. Векторное произведение векторов, его свойства. Вычисление векторного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Критерий коллинеарности двух векторов.
9. Смешанное произведение векторов, его свойства. Вычисление смешанного произведения в координатах, заданных в ортонормированном базисе. Вычисление объема параллелепипеда. Критерий компланарности трех векторов. Прямоугольная декартова система координат. Радиус-вектор точки. Радиус-вектор точки, делящей отрезок в данном отношении, середина отрезка. Уравнение поверхности и его геометрический образ. Прямая и обратная задачи аналитической геометрии. Общее уравнение плоскости в пространстве. Теорема о том, что любое линейное уравнение первого порядка задает плоскость. Уравнение плоскости, проходящей через три точки. Нормальное уравнение плоскости.
10. Взаимное расположение плоскостей. Угол между плоскостями. *Расстояние от точки до плоскости. Прямая в пространстве. Общие уравнения прямой. Векторное уравнение прямой. Параметрические и канонические уравнения прямой. Уравнения прямой, проходящей через две точки. Взаимное расположение прямой и плоскости. Угол между прямой и плоскостью. Условия параллельности прямой и плоскости. Взаимное расположение прямых. Критерий принадлежности двух прямых одной плоскости. Вычислений расстояний: между двумя прямыми и *от точки до прямой.

Литература по теме: [3], гл. 1-3, [7], гл. 1-2, [6], гл. 9.; [11]; [2].

Тема 5. Комплексные числа

11. Комплексные числа: алгебраическая и тригонометрическая форма записи. Модуль и аргумент комплексного числа. Главное значение аргумента. Сложение, умножение комплексных чисел и их свойства. Комплексное сопряжение. Деление комплексных чисел. Формула Муавра. Извлечение комплексного корня n-ой степени. Основная теорема алгебры. Теорема Безу. Формула Эйлера. Формулы Виета. Разложение многочленов на неприводимые множители над действительными и над комплексными числами.

Литература по теме: [1], т.1, гл.5, § 1.

Тема 6. Элементы общей алгебры

12. Сюръективность и инъективность. Биекция. Бинарные операции. Ассоциативные и коммутативные бинарные операции. Группоид и полугруппа. Примеры. Моноид. Обратимые элементы. Группа. Примеры групп: симметрическая группа, общая линейная группа, специальная линейная группа. Абелева группа. Подгруппа. Гомоморфизм. Ядро гомоморфизма. Эпиморфизм и мономорфизм. Изоморфизм групп. Циклическая группа. Порядок элемента. Связь порядка элемента, порождающего циклическую группу, с порядком группы. Таблица Кэли. Теорема о том, что все циклические группы одного порядка изоморфны. Три свойства изоморфизма. Пример конечной циклической группы: вычеты. Таблица Кэли для вычетов по модулю 4.
13. Левый смежный класс по некоторой подгруппе. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа и три её следствия. Примеры групп: группа диэдра, знакопеременная группа. Группа кватернионов. Утверждение о том, какими могут быть подгруппы группы целых числе по сложению.
14. Нормальная подгруппа. Критерий нормальности. Определение факторгруппы. Естественный гомоморфизм. Утверждение о том, что нормальными подгруппами являются ядра гомоморфизмов и только они. Теорема о гомоморфизме.
15. Прямое произведение групп. Замечание о том, какими бывают группы порядка восемь.
16. Теорема Кэли.
17. Криптография с открытым ключом. Задача дискретного логарифмирования. Система Диффи–Хеллмана обмена ключами. Криптосистема Эль–Гамаля. RSA.
18. Определение кольца. Аддитивная группа кольца. Мультипликативная полугруппа кольца. Примеры колец: числовые кольца, полное матричное кольцо, кольцо вычетов, кольцо многочленов от одной переменной. Подкольцо. Подкольцо, порожденное множеством. Коммутативное кольцо.

Делители нуля и обратимые элементы. Целостное кольцо. Критерий целостности для нетривиального коммутативного кольца с единицей.

19. Поле, примеры полей. Утверждение, что кольцо вычетов по модулю p является полем тогда и только тогда, когда p простое. Подполя: примеры. Двусторонний идеал. Главный идеал. Гомоморфизм колец. Факторкольцо. Лемма о том, что ядро гомоморфизма колец является идеалом. Теорема о гомоморфизме колец, пример. Характеристики поля. Простое подполе. Утверждение о том, каким будет простое подполе в зависимости от характеристики. Расширение поля. Поле рациональных дробей. Утверждение о том, когда факторколько кольца многочленов над полем само является полем (без доказательства). Расширение поля, получено путем присоединения элемента: примеры. Алгебраические элементы над полем. Утверждение о том, сколько элементов может быть в конечном поле и как устроены его подполя (без доказательства). Утверждение о том, что любое конечное поле может быть реализовано как факторкольцо кольца многочленов по идеалу, порожденному неприводимым многочленом (без доказательства). Алгоритм Евклида нахождения наибольшего общего делителя в кольце многочленов. Выражение для наибольшего общего делителя двух многочленов. Взаимная простота в кольцах. Китайская теорема об остатках.
20. Алгебры: определение и примеры.

Литература по теме: [1], т.1, гл.1,§§ 5,6,7; [1], т.1, гл.4, §1; [1], т.1, гл.4, §2, т.3, гл.1, с.43-45; [1], т.1, гл.1, §8; [1], т.1, гл.4, §3; [1], т.1, гл.5, §2, гл.6, §1,4; [1], т.1, гл.5, §1; [1], т.1, гл.5, §4, т.3, гл.5, §2; [13].

Тема 7. Линейные пространства. Линейные отображения и операторы.

21. Линейное (векторное) пространство: аксиомы, их простейшие следствия. Примеры. Базис, размерность, координаты вектора в базисе, запись операций над векторами в координатах. Матрица перехода от старого базиса к новому. Изменение координат вектора при изменении базиса. Утверждение о том, как меняется матрица перехода при двух последовательных переходах. Подпространства в линейном пространстве. Линейная оболочка конечного набора векторов и ее размерность. Изоморфизм линейных пространств. Теорема о том, что ранг системы векторов равен рангу матрицы, составленной из столбцов их координат. Литература по теме: [3] §§ 7.1 - 7.5; [1] гл.1 §§1,2; [6] гл.3-5.
22. Сумма и прямая сумма подпространств. Пересечение подпространств. Утверждение о связи размерности суммы и пересечения подпространств. Линейные отображения и преобразования (операторы) линейных пространств. Матрица линейного оператора. Теорема о том, что действие линейного оператора в конечномерном пространстве полностью

определяется матрицей линейного оператора. Утверждение о формуле для матрицы оператора при замене базиса. Действия над линейными отображениями. Сопряженное пространство. Ковекторы. Преобразование координат ковектора. Сопряженные отображения. Литература по теме: [3] §7.3-7.4, 8.1-8.3; [1] т.2 гл.1 §2, гл.2 §§1,2.

23. Ядро и образ (множество значений) линейного отображения. Утверждение о связи размерностей ядра и образа линейного оператора. Собственный вектор и собственное значение линейного оператора. Собственное подпространство. Характеристическое уравнение и характеристический многочлен квадратной матрицы. Инвариантность характеристического многочлена. Утверждение о том, что число принадлежит спектру тогда и только тогда, когда оно является корнем характеристического многочлена (над алгебраически замкнутым полем). Алгебраическая и геометрическая кратности собственного значения и неравенство, их связывающее (без доказательства). След матрицы. Утверждение о том, что след матрицы линейного оператора не зависит от выбора базиса. Литература по теме: [3] §8.4-8.6; [1] т.2 гл.2 §1,3.

24. Линейная независимость собственных векторов, отвечающих различным собственным значениям. Приведение матрицы линейного оператора к диагональному виду путем перехода к базису из собственных векторов, условия диагонализируемости. *Разложение пространства в прямую сумму корневых подпространств. *Формулировка теоремы о жордановой нормальной форме матрицы оператора. *Корневые подпространства. *Формула для числа жордановых клеток заданного размера. *Теорема Гамильтона–Кэли (формулировка). Литература по теме: [3] §8.6; [1] т.2 гл.2 §§3-4; [6] гл.7.

Тема 8. Билинейные и квадратичные функции, евклидовы пространства

25. Билинейные формы. Формула для преобразования матрицы билинейной формы при замене базиса. Квадратичные формы. Формула для преобразования матрицы квадратичной формы при замене базиса. Теорема об инвариантности ранга. Положительно (отрицательная) определенность квадратичной формы, критерий Сильвестра и его следствие. Канонический и нормальный виды квадратичной формы. Литература по теме: [3] §§9.1-9.3; [1] т.2 гл.1 §4; [6] гл.8.

26. Евклидово пространство. Примеры. Неравенство Коши–Буняковского. Ортогональный и ортонормированный базисы. Алгоритм ортогонализации Грама–Шмидта. Существование ортонормированного базиса в любом конечномерном пространстве. Матрица Грама и 5 её свойств: 1) критерий невырожденности, 2) симметричность и положительная определенность, 3) формула для преобразования матрицы Грама при переходе к новому базису, 4) положительность определителя, 5) инвариантность определителя матрицы

Грама относительно процесса ортогонализации Грама–Шмидта. Ортогональное дополнение. Разложение евклидова пространства в прямую сумму подпространства и его ортогонального дополнения. Ортогональная проекция вектора на подпространство и ортогональная составляющая. Литература по теме: [3] §10.1-10.5; [1] т.2 гл.3 §1; [6] гл.10.

27. Взаимные базисы. Изоморфизм между евклидовым пространством и сопряженным к нему. Биортогональные базисы. Формула для ортогональной проекции вектора на подпространство. Расстояние и угол между вектором и подпространством. Формула для расстояния через определители матриц Грама. Линейные операторы в евклидовом пространстве. Сопряженный оператор. Теорема о существовании сопряженного оператора. Формула для матрицы сопряженного оператора. Самосопряженные (симметрические) операторы. Критерий самосопряженности оператора. Ядро и образ сопряженного оператора. Теоремы Фредгольма. Литература по теме: [3] §§10.5-10.7; [1] т.2 гл.3 §3; [6] гл.11; [16].

28. Ортогональность собственных векторов самосопряженного оператора, отвечающих разным собственным значениям. Вещественность собственных значений самосопряженного оператора. Теорема о существовании для самосопряженного оператора ортонормированного базиса из собственных векторов. Доказательство этой теоремы в случае различных вещественных собственных значений. Ортогональные матрицы и их свойства. Ортогональные операторы. Теорема о том, что ортогональный оператор переводит ортонормированный базис в ортонормированный и верно обратное. Критерий ортогональности оператора, использующий его матрицу. Канонический вид ортогонального оператора. Теорема Эйлера. Теорема о том, что для любой симметрической матрицы найдется подобная ей диагональная матрица, а подобие будет осуществляется с помощью ортогональной матрицы. Теорема о сингулярном разложении. Утверждение о QR-разложении. Утверждение о полярном разложении. LU-разложение.

29. *Полуторалинейная форма. Эрмитова форма. Утверждение о формуле для преобразования матрицы эрмитовой формы при переходе к другому базису. Эрмитово пространство. Унитарные матрицы. Свойства унитарных матриц.
Сопряженный оператор в эрмитовом пространстве. Самосопряженный оператор в эрмитовом пространстве. Эрмитовы матрицы. Свойства самосопряженного оператора в эрмитовом пространстве. Унитарный оператор в эрмитовом пространстве. Свойства унитарного оператора. Канонический вид унитарного оператора. Утверждения о полярном и сингулярном разложении в эрмитовом пространстве (формулировка).
Литература по теме: [3] §§10.7-10.8; [1] т.2 гл.2 §3 гл.3 §1; [6] гл.11; [16].

30. Приведение квадратичной формы к каноническому (нормальному) виду методом выделения квадратов (алгоритм Лагранжа). *Метод Якоби.

Индексы инерции. Закон инерции квадратичных форм (формулировка). Приведение квадратичных форм к диагональному виду (к главным осям) при помощи ортогональной замены координат. Литература по теме: [3] §§9.2-9.3; [1] т.2 гл.1 §4, гл.3 §3; [6] гл.8.

Тема 9. Кривые и поверхности второго порядка

31. Кривые второго порядка. Определение эллипса, гиперболы, параболы, их параметры (в частности, эксцентриситет). Вывод уравнения эллипса. Вывод уравнения параболы. Исследование алгебраического уравнения второго порядка от двух переменных. Оптические свойства кривых второго порядка. Поверхности второго порядка (обзор). Поверхность вращения, цилиндрическая поверхность, линейчатая поверхность. Эллиптический цилиндр, гиперболический цилиндр, параболический цилиндр. Эллипсоид, однополостной гиперболоид, двуполостной гиперболоид, эллиптический параболоид, гиперболический параболоид. Нахождение прямолинейных образующих для однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида.
Литература по теме: [3] прил.1, 2; [1] т.2 гл.5 §§1,2; [6] дополнение Б; [11]; [18].

3. Оценивание

Формы контроля знаний студента:

Тип контроля	Форма контроля	1 год				Параметры
		1	2	3	4	
		Неделя проведения в модуле				
Текущий	Контрольная работа	7		8		Письменная работа, 120 минут
	Домашнее задание	7	7	7	7	Выполнение домашних заданий
Промежуточный	Экзамен, Коллоквиум		9		9	Письменная работа на 120 минут во 2-м модуле и коллоквиум в 4-м
Итоговый	Экзамен				12	Письменная работа на 120 минут

3.1. Критерии оценки знаний, навыков

Для прохождения контроля студент должен, как минимум, продемонстрировать знания основных определений и формулировок теорем; умение решать типовые задачи, разобранные на семинарских занятиях.

Оценки по всем формам текущего контроля выставляются по 10-ти балльной шкале.

3.2. Порядок формирования оценок по дисциплине

Предусмотрены 2 контрольные работы (в первом и третьем модулях) и 4 домашних задания. Во втором и четвертом модулях проводятся экзамены. В четвертом модуле проводится коллоквиум.

Результирующая оценка за 1 семестр (1-2 модули):

$$O1 = 0{,}2 \cdot O_{\text{Кр}-1\text{мод}} + 0{,}14 \cdot O_{\text{Дз}-1\text{ и }2\text{ мод}} + 0{,}06 \cdot O_{\text{Сем}-1} + 0{,}6 \cdot O_{\text{Экз.раб.}-1}$$

Результирующая оценка за весь курс (в 4-м модуле):

$$O2 = 0{,}245 \cdot O_{\text{Кр}-3\text{мод}} + 0{,}245 \cdot O_{\text{Коллоквиум}-4\text{мод}} + 0{,}11 \cdot O_{\text{Сем}-2} + 0{,}1 \cdot O_{\text{Дз}-3\text{ и }4\text{ мод}} + 0{,}3 \cdot O_{\text{Экз.раб.}-2}$$

Здесь $O_{\text{Сем}-1}$— оценка от 0 до 10 баллов, учитывающая регулярность посещения семинаров, активность на семинарах, в том числе решение задач у доски, и выполнение текущих домашних работ в 1-2 модулях.

Здесь $O_{\text{Сем}-2}$ – оценка от 0 до 10 баллов, учитывающая посещение семинаров, активность на семинарах, в том числе решение задач у доски, и выполнение текущих домашних работ в 3-м и 4-м модулях.

Оценки за домашние задания в 1 и 2 модулях, а также в 3 и 4 модулях вычисляются как среднее арифметическое $O_{\text{Дз}-\text{мод}1(3)}$ и $O_{\text{Дз}-\text{мод}2(4)}$.

В конце второго и четвертого модуля проводятся письменные экзамены.

Экзамен проводится в письменной форме очно или с использованием синхронного прокторинга (для оформивших переход на онлайн обучение). Во втором случае действовать нужно следующим образом. К экзамену необходимо подключиться за 10 минут до начала. На платформе прокторинга доступно тестирование системы. Компьютер студента должен удовлетворять минимальным техническим требованиям, описанным на платформе. Для участия в экзамене студент обязан: заранее зайти на платформу прокторинга, провести тест системы, включить камеру и микрофон, подтвердить личность. Во время экзамена студентам запрещено: общаться (в социальных сетях, с людьми в комнате), списывать. Кратковременным нарушением связи во время экзамена считается прерывание связи до 3 минут. Долговременным нарушением связи во время экзамена считается прерывание связи на 3 минуты и более. При долговременном нарушении связи студент не может продолжить участие в экзамене. Процедура пересдачи аналогична процедуре сдачи.

В экзаменационную ведомость выставляется результирующая оценка. При нормальном посещении занятий дробные баллы округляются до целых по правилам арифметики – до ближайшего целого, при систематических пропусках занятий или мероприятий текущего контроля выставляется целая часть соответствующего балла (на усмотрение преподавателя, ведущего семинары). Оценку посещаемости производит преподаватель, проводящий семинарские занятия. В экзаменационную ведомость выставляется также оценка по данной дисциплине по пятибалльной шкале, получаемая из оценки по десятибалльной шкале согласно таблице соответствия (см. Приложение к приказу Ректора НИУ ВШЭ № 6.18.1-01/1601-03 от 16 января 2013 г. об утверждении новой редакции ПОЛОЖЕНИЯ ОБ ОРГАНИЗАЦИИ КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ, утвержденного ученым советом НИУ ВШЭ (протокол от 21.12. 2012 г. № 42)).

Таблица соответствия оценок за экзамен по десятибалльной и пятибалльной системам

5-балльная шкала при проведении экзамена	10-балльная шкала
Неудовлетворительно	0
	1
	2
	3
Удовлетворительно	4
	5
Хорошо	6
	7
Отлично	8
	9
	10

4. Примеры оценочных средств

Образцы задач контрольных работ, работ для проверки домашних заданий, экзаменационных работ по алгебре.

Приведенные списки задач являются предварительными. Уточненные списки задач для подготовки высылаются студентам перед проведением контрольных мероприятий.

Блокирующих элементов контроля не предусмотрено.

Типовые задачи для подготовки к контрольной работе за 1 модуль.

1. Исследуйте и решите систему при всех значениях параметра
$$\begin{cases} \alpha x + 3y = \alpha + 1 \\ (\alpha + 2)x + 9\alpha y = 6 \end{cases}$$
2. Выполните действия:
$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T$$
где
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Решите систему линейных уравнений с помощью обратной матрицы:
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

4. Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

5. Исследовать и решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 4x_4 + x_5 = 2 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - \alpha x_4 - x_5 = 2 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -5\beta \end{cases}$$

6. Подобрать j и i так, чтобы произведение $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$ входило в определитель 7 порядка со знаком минус.
7. Решите матричное уравнение

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

8. Решить неравенство

$$\det \begin{pmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \le 50$$

9. Вычислить определитель матрицы порядка *n:*

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Типовые задачи для домашних заданий (1-2 модуль)

1. Дана точка A (0, 2, 1) и плоскость P: $8x - 5y + 8z + 7 = 0$. Найти расстояние между ними. Найти координаты точки A', расположенной симметрично точке A относительно плоскости P.
2. Даны точки A $(-3, -3, 5)$, M_1 $(6, 1, 0)$, M_2 $(7, 0, 1)$. Написать каноническое уравнение прямой L, проходящей через точки M_1 и M_2. Найти расстояние между точкой A и прямой L. Найти координаты точки A', расположенной симметрично точке A относительно прямой L.
3. Заданы две прямые L_1 и L_2 своими общими уравнениями:

$$L_1\colon \begin{cases} -6x - y - 2z + 6 = 0 \\ -x + 2y - z + 1 = 0 \end{cases}, L_2\colon \begin{cases} -x - y + 5z - 1 = 0 \\ -2x + 6z + 3 = 0 \end{cases}$$

Найти расстояние между L_1 и L_2. Написать каноническое уравнение прямой, являющейся общим перпендикуляром к L_1 и L_2.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} (1 - 3i)x + (1 - 2i)y = -8 + 2i \\ (4 + 10i)x + (6 + 6i)y = -6 - 8i \end{cases}$$

5. Пусть $z = 2\sqrt{3} + 2i$. Вычислить значение $\sqrt[6]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[6]{z^3}}{2+2i\sqrt{3}}$ имеет аргумент $7/4\,\pi$.

6. Решите уравнение $BXA^{-1} = C^{-1}A$ относительно неизвестной подстановки X, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 3 & 1 & 2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 7 \end{pmatrix},$$
$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 1 & 2 & 7 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

7. Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов, транспозиций, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744}.

8. Решить уравнение $z^2 - (7 + i)z + (18 + i) = 0$.

9. Найти корни многочлена $3x^4 + 3x^3 - 6x^2 - 18x - 12$ и разложить его на множители над $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$.

Типовые задачи для подготовки к экзаменационной работе (2 модуль)

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1,\ 4,\ 1\}, b\{2,\ 1,\ 3\}, c\{-2,\ 0,\ 3\}$. Найти вектор y такой, что
$$y \perp a,\ (y,\ c) = 2,\ (y,\ b) = 9.$$

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a = p + 3q, b = p - 2q$, если $|p| = 2, |q| = 3$, $(p\hat{}q) = \frac{\pi}{3}$.

3. Даны вершины треугольника A(−5, 3), B(7, 8), C(−2, −1). Составить уравнения медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. Система координат ортонормированная.

4. Даны точки $A(2,\ 1,\ 0), B(0,\ 2,\ 1), C(1,\ 2,\ 0), D(1,\ 0,\ -2)$. Найти: (а) объем пирамиды *ABCD*; (б) длину высоты, проведенной из вершины *D*.

5. Проверить, что прямые
$$a : 2x = y + 1 = z + 2,\ b : x - 1 = -1 - y = z$$
лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости. Найти расстояние от точки $A(1,\ 4,\ -2)$ до этой плоскости.

6. Найти угол между прямой
$$\begin{cases} 2x + 2y + 3z + 5 = 0 \\ x - 2y + z + 7 = 0 \end{cases}$$
и плоскостью $3x + y - 4z - 15 = 0$, а также координаты точки их пересечения.

7. а) Найти точку *M'*, симметричную точке $M(-1,\ 2,\ 0)$ относительно прямой

$$\frac{x+0{,}5}{1}=\frac{y+0{,}7}{-0{,}2}=\frac{z-2}{2}.$$

b) Найти точку M', симметричную точке $M(3,\ 3,\ 3)$ относительно плоскости
$$8x+6y+8z-25=0.$$

8. Даны точки $P(1,\ 2,\ 0), Q(1,\ 0,\ 2), R(2,\ 1,\ 0), S(0,\ -2,\ 1)$. Найти:
   a) объем пирамиды $PQRS$;
   b) угол между плоскостями *(PQS)* и *(QRS)*.
9. Исследовать взаимное расположение прямых
$$\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2} \text{ и } x=6t+9, y=-2t, z=-t+2.$$
   Вычислить расстояние между ними.
10. Решите уравнение $A^{-1}XB \ = \ C$, где
$$A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}2 & 2 & -1\\ 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix}5 & 5 & 2\\ 5 & 8 & -1\end{pmatrix}.$$
11. Решите уравнение $A^{-1}XB=C$, A, B, C – подстановки
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 6 & 4 & 7 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 3 & 5 & 6 & 2 & 4 & 7 & 1\end{pmatrix},$$
$$C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 7 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5\end{pmatrix}.$$
12. Решить неравенство
$$\det\begin{pmatrix}1 & 2x & 0 & 0 & 0\\ 1-x & 4 & 0 & 0 & 0\\ 2 & -1 & x+4 & 3 & 2\\ -1 & 2 & -1 & 2x & -2\\ 1 & -1 & 2 & 3 & 2\end{pmatrix}>0.$$
13. Вычислите матрицу $6A^{-1}-(BA^2-AB)^T$,
$$A=\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 1 & -3\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 5 & 0\end{pmatrix}.$$
14. Найдите все решения системы линейных уравнений
$$\begin{cases} x_1+4x_2-2x_3-3x_4=2\\ 2x_1+9x_2-x_3-4x_4=5\\ x_1+5x_2+x_3-4x_4+3x_5=3\end{cases}$$
   Запишите решение в виде вектора-столбца. Найдите ФСР соответствующей однородной системы.
15. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X=\left\{\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}, a, b\in\mathbb{Z}\right\}, Y=\mathbb{N}$, $\phi\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right)=a^2+b^2$ инъективным, сюръективным?
16. Найдите комплексные корни уравнения $z^6+\frac{\sqrt{2}(i-1)}{\sqrt{3}+i}=0$, для которых $0<\arg z<\frac{\pi}{2}$.
17. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}(5-i)x+(3i-1)y=4+4i\\ (2+i)x-(3+2i)y=4-4i\end{cases}$$

18. Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

19. Найти общее решение системы линейных уравнений (представить его как сумму частного решения и линейной комбинации линейно независимых решений соответствующей однородной системы):

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 4x_5 = 1 \\ 4x_1 - 7x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 2 \\ 5x_1 - 8x_2 - 5x_3 + 2x_4 - 12x_5 = 3 \end{cases}$$

Типовые задачи для подготовки к контрольной работе в 3-м модуле

1. Проверить, что данные векторы $\overrightarrow{a_1} = (1,0,1,1)^T$, $\overrightarrow{a_2} = (1,3,1,2)^T$, $\overrightarrow{a_3} = (2,0,1,2)^T$, $\overrightarrow{a_4} = (1,-1,-1,0)^T$ образуют базис в пространстве столбцов. Найти координаты вектора $\vec{b} = (3,-10,-4,-3)^T$ в этом базисе.
2. Найти размерность и базис линейной оболочки векторов $\overrightarrow{a_1} = (1,-1,2,1)^T$, $\overrightarrow{a_2} = (1,2,1,-1)^T$, $\overrightarrow{a_3} = (0,3,-1,-2)^T$, $\overrightarrow{a_4} = (3,3,4,-1)^T$, $\overrightarrow{a_5} = (1,-4,3,3)^T$ в $\mathbb{R}^4$, выразить небазисные векторы через базисные.
3. Найти размерность и базис (то есть фундаментальную систему решений) подпространства решений системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 0 \\ 3x_2 + x_3 + 3x_4 - 3x_5 = 0 \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

4. Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

5. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $\overrightarrow{a_1} = (1,1,2,1,2)^T$, $\overrightarrow{a_2} = (0,-1,-2,1,-1)^T$, $\overrightarrow{a_3} = (3,1,2,5,4)^T$ в $\mathbb{R}^5$.
6. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств V_1, V_2 в $\mathbb{R}^4$, $V_1 = \langle \overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3} \rangle$, $V_2 = \langle \overrightarrow{b_1}, \overrightarrow{b_2} \rangle$, где $\overrightarrow{a_1} = (1,0,-3,-2)^T$, $\overrightarrow{a_2} = (7,1,9,14)^T$, $\overrightarrow{a_3} = (-4,1,2,-9)^T$, $\overrightarrow{b_1} = (10,1,0,8)^T$, $\overrightarrow{b_2} = (-3,0,1,-3)^T$.
7. Линейное преобразование ϕ в $\mathbb{R}^2$ отображает векторы $\overrightarrow{a_1} = (1,4)^T, \overrightarrow{a_2} = (2,7)^T$ соответственно в векторы $\overrightarrow{b_1} = (2,-3)^T$, $\overrightarrow{b_2} = (-4,5)^T$. Определить матрицу этого преобразования.

8. Линейный оператор ϕ в базисе v: $\overrightarrow{v_1} = (3,2)^T, \overrightarrow{v_2} = (1,1)^T$ имеет матрицу $A_v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Какой будет его матрица в базисе u: $\overrightarrow{u_1} = (-1,-1)^T, \overrightarrow{u_2} = (2,1)^T$?
9. Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей $A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Является ли отображения сюръективным?
10. В циклической группе $G = \langle a \rangle$ порядка 228 найти
(a) все элементы g такие, что $g^{48} = 1$;
(b) элементы g порядка 48
и в каждом случае подсчитать их количество.

Типовые задачи для домашних заданий (3 модуль)

1. Является ли (a) полугруппой, (b) моноидом, (c) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.
2. Является ли отображение $\phi: X \to Y$, где $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z} \right\}$, $Y = \mathbb{Z}$, $\phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = a + b + c$, инъективным, сюръективным, биективным?
3. Является ли отображение $\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ гомоморфизмом (изоморфизмом) групп, если первая группа — это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа — множество $H = \left\{ \begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z} \right\}$ с операцией сложения?
4. Найдите количество классов сопряженности в группе $D_5 \times S_3 \times Z_8$.
5. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_4 \times S_3 \times Z_3$?
6. Группа $GL_3(\mathbb{R})$ действует на себе сопряжениями. Найти стабилизатор матрицы $\begin{pmatrix} 4 & 7 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$.
7. Пусть $f(x) = x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^2$, $g(x) = x^8 + x^6 + x^5 + x^3$ – многочлены над полем $\mathbb{Z}_2$. Найти НОД$(f,\, g)$ и многочлены $u(x), v(x) \in \mathbb{Z}_2[x]$ такие, что
$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f,\, g).$$
8. Рассмотрим поле $F = \mathbb{F}_2[x]/< x^3 + x^2 + 1 >$. Через $\bar{f}$ будем обозначать смежный класс
$$f + < x^3 + x^2 + 1 > \in F.$$
Представить в виде $\bar{f}$, где $\deg(f) \leq 1$ выражение
$$\frac{x^2+1}{x^3+1} + (x^6 + x^5)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x) - \frac{x+1}{x}$$

Типовые задания для домашних заданий (4 модуль)

32. Даны два подпространства:
$$L1 = \{(2,4,2),(6,8,0),(7,2,6)\}$$
$$L1 = \{(1,0,-1),(0,8,10),(7,7,-2)\}$$
Найти размерность $L1 + L2$ и базис $L1 \cap L2$.

33. Применить алгоритм нахождения жордановой нормальной формы для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

34. На линейном пространстве $\mathbb{R}_3[x]$ многочленов степени не выше трех задана функция $f(p) = p(0) + p(1)$. Показать, что эта функция является линейной формой. Найти строки её координатной записи в базисе
а) $1,\ x,\ x^2,\ x^3$,
б) $1, x-1, (x-1)^2, (x-1)^3$.

35. В пространстве $\mathbb{R}^3$ задан базис
$$e_1 = (1,-1,0), e_2 = (0,1,1), e_3 = (-1,1,1)$$
Найти взаимный с ним базис f_1, f_2, f_3.

36. Найти расстояние от конца вектора $\vec{\alpha} = (1,0,-1)$ до подпространства L, заданного системой уравнений, найти косинус угла между L и α.
$$\begin{cases} 2\mathrm{x}_1 + 8\mathrm{x}_2 + 9\mathrm{x}_3 = 13 \\ 6\mathrm{x}_1 + 5\mathrm{x}_2 + 4\mathrm{x}_3 = 3 \\ \mathrm{x}_1 + 7\mathrm{x}_2 + 7\mathrm{x}_3 = 5 \end{cases}$$

37. Найдите расстояние между линейными многообразиями $\{t_1v_1 + t_2v_2 + x_1\}$ и $\{t_1w_1 + t_2w_2 + x_2\}$, где
$$\overrightarrow{v_1} = (2,4,0,1), \overrightarrow{v_2} = \left(\frac{1}{5,3,1,4}\right), \overrightarrow{x_1} = (24,23,27,2), \overrightarrow{w_1} = (15,6,9,6),$$
$$\overrightarrow{w_2} = (3/5,9,3,12), \overrightarrow{x_2} = (53/2,24,57/2,3).$$

38. С помощью ортогонализации столбцов найти QR-разложение для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$
Проверить результат перемножением матриц.

39. Можно ли матрицу оператора, заданного матрицей A в некотором ортонормированном базисе привести ортогональным преобразованием к диагональному виду? Если да, то указать это преобразование и сам диагональный вид.
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

9. Найдите канонический вид, угол и ось поворота ортогонального оператора, заданного матрицей:
$$O = \begin{pmatrix} -1/8 & 3/4 & 3\sqrt{3}/8 \\ -3/4 & -1/2 & \sqrt{3}/4 \\ 3\sqrt{3}/8 & -\sqrt{3}/4 & 5/8 \end{pmatrix}$$
10. Применить алгоритм нахождения сингулярного разложения для матрицы
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$
Проверить результат перемножением матриц. Какая матрица получится, если в разложении оставить только первое сингулярное число, а остальные сингулярные числа заменить нулями?

Задачи для подготовки к экзамену в 4-м модуле

1. Представить невырожденную матрицу
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
в виде произведения ортогональной матрицы Q на верхнетреугольную матрицу R с положительными элементами на главной диагонали.
2. Пусть в некотором ортонормированном базисе трёхмерного евклидова пространства заданы векторы $\overrightarrow{e_1} = (0,1,1)^T$, $\overrightarrow{e_2} = (-1,-1,1)^T$, $\overrightarrow{e_3} = (1,0,1)^T$. Пусть оператор f задан матрицей $A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$ в базисе $\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}$. Найти матрицу A_{f^*} спорyженного оператора f^* в том же базисе.
3. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ квадратичная форма $Q(x)$ имеет матрицу
$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}.$$
Найти матрицу квадратичной формы $Q(x)$ в базисе $\hat{e}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \hat{e}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
4. Привести квадратичную форму $2x_1^2 - 2x_1x_3 - x_2^2 + 5x_3^2$ к нормальному виду с помощью метода Лагранжа. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.
5. Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.
6. Исследовать квадратичную форму на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра: $k = (\alpha - 1)x_1^2 + (2\alpha - 2)x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_2x_3 + (\alpha - 2)x_3^2$.

7. Уравнение $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ линии второго порядка на плоскости Oxy привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига, указав:

   а) одно из преобразований перехода от заданной системы координат к канонической системе координат;

   б) канонический вид уравнения линии;

   в) определить тип кривой. На плоскости Oxy построить каноническую систему координат, в которой схематично изобразить кривую.
8. Эллипс проходит через точку $C(0; -1 + \sqrt{20})$, его большая ось оканчивается вершинами $A(-2{,}5), B(-2, -7)$. Написать уравнение кривой, уравнение нижней части эллипса в системе Oxy. Указать большую и малую полуоси, найти эксцентриситет и сделать эскиз.
9. Определить тип поверхности второго порядка, назвать её и сделать эскиз:

   a) $\mathrm{x}^2 + \mathrm{z}^2 - \mathrm{y}^2 = 1$

   b) $\mathrm{y}^2 = -2\mathrm{x}$
10. Записать каноническое уравнение эллиптического параболоида вращения, вытянутого вдоль оси OY.

По задачнику [12]:

1557, 1558, 1542, 1586, 1181, 1178, 1175, 1179, 1192, 1202, 1212, 1215, 1207, 1244, 1246, 1249, 1252, 1254, 1250.

По задачнику [11]:

35.23 1), 35.24 10), 35.27 1), 11). 36.5. 37.1. 38.10 1) 38.9 1). 35.27 2), 5), 8), 35.24 1), 14), 35.23 2), 37.11, 38.12 4), 9), 11) 38.12 3), 6) 38.9 2), 8).

Дополнительные задачи (по [11]):

34.1 1), 3) 5), 34.3, 34.5, 34.13 1), 2), 7), 34.16, 34.24, 34.29, 34.57, 34.66.

5. Ресурсы

5.1. Рекомендованная основная литература

[1] Кострикин А.И. Введение в алгебру. Ч. I. Основы алгебры. Ч. II. Линейная алгебра. Ч. III. Основные структуры алгебры. М.: МЦНМО, 2009 -2010.

[2] Канатников А.Н., Крищенко А.П. Аналитическая геометрия. 2-е изд. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000.– 388 с.

[3] Умнов А.Е. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. М.: МФТИ, 2006.

[4] Беклемишева Л.А., Беклемишев Д.В., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре.– 3-е изд. СПб.: Лань, 2008.

[5] Сборник задач по алгебре под редакцией А.И. Кострикина. М.: МЦНМО, 2015.

[6] Бурмистрова Е.Б., Лобанов С.Г. Линейная алгебра. М.: Юрайт, 2014.

[7] Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Физматлит, 2009.

[8] Данко П.Е., Попов А.Г., Кожевникова Т.Я., Данко С.П. Высшая математика в упражнениях и задачах. 7-е изд. Ч.I. М.: Оникс, 2009.

[9] Курош А.Г. Курс высшей алгебры. СПб.: Лань, 2007.

[10] Шевцов Г.С. Линейная алгебра: теория и прикладные аспекты. М.: Финансы и статистика, 2003.

[11] Ким Г.Д., Крицков Л.В. Алгебра и аналитическая геометрия: Теорема и задачи, Том I. М.: “Планета знаний”, 2007. – 469 с.

[12] Проскуряков И.В. Сборник задач по линейной алгебре, М.: БИНОМ. 2002.

[13] Винберг Э.Б., Курс алгебры, М.: изд. МГУ, 2002.

[14] Канатников А.Н., Крищенко А.П. Линейная алгебра. 3-е изд., стер. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002. –336 с.

5.2. Рекомендованная дополнительная литература

[15] Aleskerov F.T., Piontkovski D.I., Ersel H. Linear Algebra for Economists. L., NY, Dordrecht, Heidelberg: Springer Verlag, 2011.

[16] Тыртышников Е.Е. Матричный анализ и линейная алгебра. — М.: Физматлит, 2007. – 480 с.

[17] Городенцев А.Л. Алгебра. Учебник для студентов-математиков. Часть 1. М.: МЦНМО, 2013. – 488 с.

[18] Александров П.С. Лекции по аналитической геометрии. Москва: Наука, 1968. – 912 с.

5.3. Программное обеспечение

Использование специального программного обеспечения не предполагается.

Рекомендуется ознакомление с основными программными пакетами для символьных вычислений и численных расчетов (Maple, Wolfram Mathematica, MATLAB, библиотеки для Python и т.д.).

5.4. Профессиональные базы данных, информационные справочные системы, интернет-ресурсы (электронные образовательные ресурсы)

В качестве дополнительного материала можно использовать: http://mathworld.wolfram.com/topics/Algebra.html

6. Особенности организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов

В текущем варианте программы не предусматривается специальных особенностей организации обучения для лиц с ограниченными возможностями здоровья и инвалидов.